Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
1er Examen Parcial (30 %)
Abr-Jul 2018

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (11 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y + \alpha^2 z &= 1 \\ x + (1-\alpha)y + z &= 1 \\ 2x + \alpha^2 z &= 5 \end{aligned}$$

Halle los valores de α para que el sistema sea:

a. Consistente con infinitas soluciones. Halle estas soluciones.

b. Inconsistente.

c. Consistente con solución única.

Solución: Escribimos la matriz aumenta del sistema y le aplicamos operaciones elementales de fila para obtener la siguiente matriz equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \\ 1 & (1-\alpha) & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha^2 & 5 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{\alpha^2}{4} & -\dfrac{3}{4} \\ 0 & 0 & (1+\alpha)(\alpha-2)^2 & -3(1+\alpha) \end{array}\right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones si $(1+\alpha)(\alpha-2)^2 = 0$ y $1+\alpha = 0$; es decir, si $\alpha = -1$. En tal caso, la matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

El sistema es inconsistente si $(1+\alpha)(\alpha-2)^2 = 0$ y $1+\alpha \neq 0$; es decir, si $\alpha = 2$.

El sistema tiene solución única si $(1+\alpha)(\alpha-2)^2 \neq 0$; es decir, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Pregunta 2. (6 ptos.) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Halle los valores de x para los cuales B tiene inversa

b. Halle el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo que $\det(A) = 8$.

Solución:

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(3x+1)$$

Como una matriz es invertible si, y sólo si, su determinante es distinto de cero, B es invertible siempre que $x \neq -\frac{1}{3}$.

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 5 & -1 \\ y & 10 & 3 \\ z & 5 & 0 \end{vmatrix} = (2)(5)\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 10\det(A) = 80$$

Pregunta 3. (7 ptos.) Halle la inversa de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Mediante el método de Jordan o a través del cálculo de la matriz adjunta, la inversa de C viene dada por

$$\frac{1}{32}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 40 & -16 \\ 3 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -32 & 32 \\ 8 & 0 & 24 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pregunta 4. (6 ptos.) Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si son verdaderas o falsas:

a. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño tales que $BA = B$ entonces $(AB)^2 = AB^2$.

b. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & a \\ -8 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ depende de los valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución:

a. La afirmación es verdadera ya que

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB = A(BA)B = ABB = AB^2.$$

puesto que el producto de matrices es asociativo.

b. La afirmación es falsa ya que al hacer la expansión por cofactores a lo largo de la última fila obtenemos que el determinante de la matriz vale 56 sin importar la asignación de valores para a y b.